

جبري الثابت :

نقطة :
ليكن A حركي فوق الحلقه التبادلية والواحدة R و I مثالية في A . لنفرض A حلقه
و بالحد

$$\forall a, b \in A \quad a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I$$

أي R حلقه تكافؤ. نرسم جميع فئات تكافؤ الحلقه R بالحد

$$A/I = \{ a+I : a \in A \}$$

نكون A/I الحلقه التبادلية :

$$\forall a+I, b+I \in A/I \quad \forall \lambda \in R$$

$$(1) (a+I) + (b+I) = (a+b) + I$$

$$(2) \lambda(a+I) = \lambda a + I$$

$$(3) [a+I, b+I] = [a, b] + I$$

أي الحلقه $(A/I, +, [,])$ حركي فوق R حيث جبري الى R .

البرهان :

نضع $a \in (A/I, +)$ حركي فوق R

$$[a+I, a+I] = [a, a] + I = 0 + I = I$$

$$\forall a+I, b+I, d+I \in A/I : [a+I, (b+I) + (d+I)] =$$

$$= [a+I, (b+d) + I]$$

$$= [a, b+d] + I$$

$$= ([a, b] + [a, d]) + I$$

$$= [a, b] + I + [a, d] + I$$

نكون A/I حلقه تبادلية

$$[(a+I) + (b+I), d+I] = [a+I, d+I] + [b+I, d+I]$$

$$\forall a \in I, b \in I \subseteq A/I \quad \forall \lambda \in R$$

$$\begin{aligned} \lambda [a+I, b+I] &= \lambda [a, b] + I = \lambda [a, b] + I = [\lambda a, b] + I \\ &= [\lambda a + I, b + I] \\ &= [\lambda(a+I), b+I] \end{aligned}$$

$$\forall a \in I, b \in I, c \in I \subseteq A/I$$

$$[a+I, [b+I, c+I]] + [b+I, [a+I, c+I]] + [c+I, [a+I, b+I]] = 0$$

$$\begin{aligned} [a+I, [b+I, c+I]] &= [a+I, [b, c] + I] \\ &= [a, [b, c]] + I \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} [b+I, [c+I, a+I]] &= [b+I, [c, a] + I] \\ &= [b, [c, a]] + I \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} [c+I, [a+I, b+I]] &= [c+I, [a, b] + I] \\ &= [c, [a, b]] + I \end{aligned} \quad (3)$$

$$([a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]]) + I = 0 + I = I \rightarrow \text{مباين في } A/I$$

تعريف :
ليكن A, B حقلين كـ بعد المتة R فتقول عن A, B انهما متماثلان اذا كانت

$$\forall x, y \in A \quad \forall \lambda \in R : f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad (2)$$

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)] \quad (3)$$

فتقول عن f انهما متماثلان اذا كانت f متماثلة الى ذلك متباين وتكون f فيه

$$A \cong B \text{ ان } A \text{ متماثل } B \text{ من حيث ذلك}$$

تسمى f متماثل + متباين + تماثل

تعريف :
ليكن $f: A \rightarrow B$ متماثل + متباين + تماثل

فإن f متماثل + متباين + تماثل

① $\text{Im}(f)$ هو جزئي في B

② $\ker(f)$ جزئي في A

البرهان:

$\text{Im}(f)$ هو صورة جزئي في B (مباشرة)

$$\forall x, y \in \text{Im}(f); \quad x = f(a) \quad y = f(b) \quad \forall a, b \in A$$

$$[x, y] = [f(a), f(b)] = f([a, b]) \in \text{Im}(f)$$

$\in A$

② $\ker(f)$ هو جزئي في A

$$\forall a \in A, \quad da(\ker f) \subseteq \ker f$$

$$\forall x \in \ker f \Rightarrow da(x) = [a, x]$$

$$\text{نثبت ان } [a, x] \in \ker f \Rightarrow f([a, x]) = [f(a), f(x)] = [f(a), 0] = 0$$

$$\Rightarrow [a, x] \in \ker f$$

وهذه هي الخاصية المطلوبة

مبرهنة القسمة الأولى:

ليكن $f: A \rightarrow B$ دالة جزئية

$$A/\ker f \cong \text{Im}(f) \quad ①$$

② $\text{Im}(f) \subseteq B$ ف $A/\ker f \cong B$

$$A/\ker f \cong B$$

تعريف:

ليكن A حلقة ونفرض ان R و I, J من جزئي في A عندها $I+J$ هو

$$I+J = \{a+b; a \in I, b \in J\}$$

$$(0+0 \in I+J \subseteq A) \quad 0 \neq I+J \subseteq A$$

$$\forall x, y \in I+J \quad \forall \lambda \in R$$

